

O jednom starém mýtu v elektromagnetismu aneb jak (ne)počítat solenoidy s feromagnetickým jádrem

Ing. Jan Růžička, konzultant v oblasti projektování,
Ústí nad Labem

V každé středoškolské učebnici fyziky nebo základů elektrotechniky se lze dozvědět, jak vypočítat intenzitu a indukci magnetického pole uprostřed válcové cívky – solenoidu. Pro velmi dlouhý (nebo spíše velmi štíhlý) solenoid bez jádra platí:

$$H = \frac{n \cdot I}{l} \quad (\text{A} \cdot \text{m}^{-1}; -, \text{A}, \text{m}) \quad (1a)$$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{n \cdot I}{l} \quad (\text{T}; \text{H} \cdot \text{m}^{-1}, \text{A} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (1b)$$

kde

H je budicí intenzita,

n celkový počet těsně vinutých závitů jednovrstvého vinutí,

I ustálený stejnosměrný proud ve vinutí,

l délka solenoidu nebo jeho jádra,

B indukce v těžišti solenoidu,

μ_0 permeabilita vakua ($4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$).

Jako podmínka použitelnosti se obvykle uvádí (bez bližší kvantifikace) splnění ostře nerovnosti:

$$d \ll l \quad (2)$$

kde d je vnitřní průměr vinutí nebo vnější průměr jádra.

Pro případ nesplnění nerovnosti (2) byly odvozeny obecnější vztahy (viz např. str. 217 v [2]). Vztahy (1) platí i pro toroid (prstencovou cívku) bez jádra za předpokladu, že délka l je délkou obvodu jeho střednice.

Dále je popsáno, jak se změni poměry u těchto dvou základních druhů cívek v případě, že jejich vnitřní prostor je vyplněn jádrem z feromagnetického materiálu.

U toroidu platí i pro tento případ vztah pro intenzitu podle (1a) a indukci pro tuto hodnotu odečteme přímo z magnetizační křivky materiálu jádra nebo vypočteme ze vztahu:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{n \cdot I}{l} \quad (\text{T}) \quad (3)$$

kde μ_r je relativní permeabilita jádra v případě, že je známa místo magnetizační křivky závislost relativní permeability na budící intenzitě.

Zde celý magnetický tok teče pouze feromagnetickým jádrem. Pro velmi štíhlý solenoid s feromagnetickým jádrem platí rovněž vztah (3) a příslušný komentář. Na tomto místě je vhodné definovat a kvantifikovat zmiňovaný pojem štíhlost. Pro účely tohoto článku se štíhlostí solenoidu rozumí poměr délky a průměru jeho jádra.

Pro štíhlost platí:

$$p = l/d \quad (4)$$

Dlouho nezodpovězenou otázkou bylo, jak počítat solenoid s feromagnetickým jádrem s konečnou reálnou štíhlostí.

Zrod mýtu

Mnoho autorů odborných knih (i vysokoškolských učebnic) se domnívalo, že v těchto případech lze s přijatelnou přesností pokračovat v analogii s toroidní cívku. To znamenalo, že postup výpočtu byl opět podle vztahu (3) s tím, že za délku se dosadí přímo délka jádra. Domnívali se, že chyba ve výsledku bude i při běžných štíhlostech (přibližně $p = 5$) malá, analogicky, jako tomu je u solenoidů bez jádra.

Znění mýtu bychom mohli zformulovat zhruba takto:

Indukce uprostřed feromagnetického jádra solenoidu závisí především na permeabilitě jeho materiálu, a vůbec ne nebo v zanedbatelné míře na jeho štíhlosti.

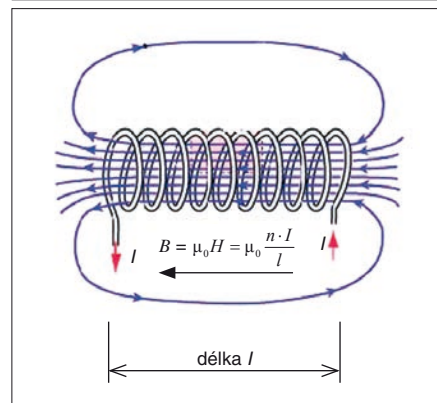
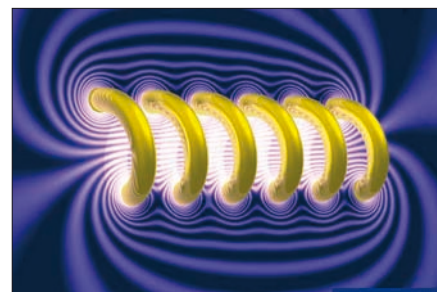
Přestože se takovýto postup prezentuje v řadě středoškolských i vysokoškolských učebnic (viz numerické příklady např. v [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]), je třeba ho jednoznačně a kategoricky odmítnout jako principiálně nesprávný, hrubě zkrslující fyzikální podstatu problému a v praxi nepoužitelný!

Rozbor pochybení – důsledky

V čem spočívá zmiňovaná principiální nesprávnost a proč nelze v analogii pokračovat? Je to v tom, že na rozdíl od toroidu, kde celý magnetický tok teče pouze feromagnetickým jádrem, u solenoidu nikoliv! Zde indukční čára kromě průchodu jádrem prochází ještě okolním prostředím – vzduchem. Ten klade magnetickému toku značný odpor, který nelze v reálném případě zanedbat a do výpočtu nezahrnout. Jde o podobný prohřešek jako

zanedbat při výpočtu toroidu s úzkou mezerou tuto mezeru.

Důsledky na přesnost výpočtu (dá-li se ještě o nějaké hovořit) jsou fatální. Odchytky takto vypočítaných hodnot indukce od reálných (naměřených) jsou nesmírné. Např. u solenoidu s jádrem z měkké uhlíkaté oceli a s $p = 5$ činí tato odchylka asi jeden řád! Vy-



Obr. 1. Principiální schéma solenoidu

počtená hodnota indukce je tak asi desetkrát větší než naměřená! Do přímo obludných rozměrů vzroste nesoulad výpočtu s realitou, použijeme-li tuto indukci pro výpočet mechanické síly, např. nosnosti tyčového magnetu. Protože zde indukce vystupuje v druhé mocnině, získáme takto sílu, která je ve výše uvedeném případě asi stokrát větší než skutečná (viz př. 4.6.2 v [7] a [9]). I když se tento chybný postup ještě v současnosti prezentuje v odborných středoškolských učebnicích základů elektrotechniky (viz [7], [8]), je zjevné a experimentálně doložitelné, že takto „počítat“ nelze. Kromě výše uvedených přímých dopadů na výpočet indukce má tento nesprávný postup ještě následný dopad i na výpočet další velmi důležité veličiny – vlastní indukčnosti tohoto případu. I při těchto výpočtech se v učebnici [7] používá tento nesprávný postup.

Jak počítat správně?

Především je nutné si uvědomit, že budící intenzita podle (1a) se zde neuplatňuje v plné hodnotě, ale je zmenšena o tzv. demagnetizační intenzitu H_d , která zahrnuje magnetický odpor okolního prostoru. Tak se získá nová výsledná intenzita, tzv. interní (vnitřní) intenzita H_i . Pro tuto intenzitu v jádru potom platí:

$$H_i = H - H_d \quad (5)$$

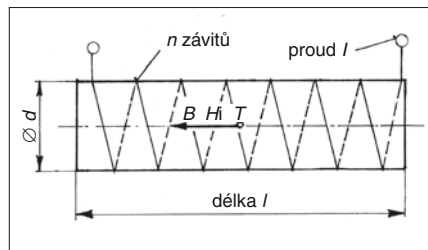
Pro tuto intenzitu lze z magnetizační křivky jádra odečíst příslušnou indukci B . Veličina H_d je funkcí permeability a štíhlosti jádra. Další podrobný postup výpočtu, včetně numerických příkladů, lze nalézt v [1]. Zejména zde uvedený grafický způsob je velmi názorný, a mohou ho proto snadno zvládnout i středoškolské studenty. Článek je k dispozici i v elektronické formě na webu časopisu Elektro 5/2006 (<http://www.odbornecaspisy.cz>).

Historické souvislosti - závěry

Historie tohoto mýtu je dlouhá a pozoruhodná. Je známo, že problematikou interakce vnějšího magnetického pole a vybuzeného pole ve feromagnetiku se zabýval již Maxwell ve svém slavném pojednání [12]. Analyticky vyřešil případ rotačního elipsoidu v homogenním magnetickém poli. Odvodil vztah pro demagnetizační faktor, veličiny nezbytné pro výpočet H_d . Pro průmyslové použití však bylo potřebnější znát demagnetizační faktor pro válcový tvar jádra. Analytické řešení nebylo možné, a proto se je mnoho badatelů pokoušelo stanovit na základě měření uskutečněných na vzorcích v laboratoři. První použitelné výsledky v tabelární a grafické formě byly publikovány ve dvacátých letech minulého století (viz [11] str. 47) a poslední asi v je-

ho polovině. Velmi dobře je tato problematika souhrnně popsána v [10]. Proto je těžko pochopitelné, proč v době vydání výše kritizovaných učebnic, kdy podklady pro správný výpočet již byly k dispozici, došlo k tak velké jejich dezinterpretaci.

Nabízí se otázka, zda, resp. za jakých podmínek lze reálný solenoid s feromagnetickým jádrem počítat kritizovaným způsobem nebo



Obr. 2. Válcové feromagnetické jádro solenoidu

co je vlastně „velmi dlouhý“ (nebo velmi štíhlý) solenoid?

Přesná odpověď není snadná a přesahuje rámec tohoto článku. Orientačně však lze říci, že při obvyklých budících intenzitách (asi $H < 10\,000\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$) a při jádru z měkké uhlíkaté oceli a s přípustnou chybou hodnoty B uprostřed jádra pod 10 % musí být jeho štíhlost $p > 500!$ V tomto případě se však charakter jádra mění z tyče na drát. Takové „cívky“ se však nepoužívají.

U malých štíhlostí je vliv permeability na výsledek zanedbatelný a určuje ho kromě budící intenzity H pouze geometrie případu, tj. štíhlost p . Docházíme tak k obdobnému závěru jako u toroidu s mezerou, kde výsledek obvykle určuje převážně velikost mezery.

Jak skoncovat s mýtem?

Ke skoncování s mýtem je především nutné ho přestat šířit v tištěné podobě

v učebnicích i v mluvené, při výuce na školách.

- V nových učebnicích je třeba zdůrazňovat, že solenoid s feromagnetickým jádrem představuje zcela (naprosto) otevřený magnetický obvod a jako s takovým je nutné s ním ve výpočtech zacházet.
- Zdůraznit zejména dominantní vliv štíhlosti na výsledky.
- Z učebnic neprodleně odstranit všechny numerické příklady a úlohy, jejichž výsledky se diametrálně odlišují od výsledků měření a jsou ve své podstatě zavádějící. Pouze tak lze zabránit případné deziluzi zvědavějších studentů, kteří takovou cívku proměří a zjistí hrubý (i řádový) nesoulad s výpočtem podle učebnice.

Literatura:

- [1] RŮŽIČKA J.: *Umíme správně spočítat solenoid s jádrem?* Elektro, 5/2006.
- [2] SEDLÁK – ŠTOLL: *Elektrina a magnetismus*. Academia, 2002.
- [3] FUKA – HAVELKA: *Elektrina a magnetismus*. SNP, 1965.
- [4] FETTER: *Přehled silnoproudé elektrotechniky*. SNTL, 1957.
- [5] MELUZÍN: *Příklady a úlohy z elektrotechniky*. Alfa, 1974.
- [6] HAJACH a kol.: *Základy elektrotechniky I*. SNTL, 1985.
- [7] BLAHOVEC: *Elektrotechnika III*. Informatorium, 2005.
- [8] BLAHOVEC: *Elektrotechnika I*. Informatorium, 2005.
- [9] BLAHOVEC: *Základy elektrotechniky v příkladech a úlohách*. SNTL, 1989.
- [10] REINBOTH: *Vlastnosti a použití magnetických materiálů*. SNTL, 1975.
- [11] BROŽ: *Základy magnetických měření*. Nakladatelství ČSAV, 1953.
- [12] MAXWELL: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford Press, 1873.

AMT měřicí technika

AUTORIZOVANÝ DISTRIBUTOR MĚŘICÍ TECHNIKY

KONZULTACE – PRODEJ – KALIBRACE – SERVIS



www.amt.cz

 Cert ISO 9001

AMT měřicí technika, spol. s r. o., Leštínská 2418/11, 193 00 Praha - Horní Počernice, fax: 281 924 344, tel.: 281 925 990, tel.: 602 366 209, e-mail: info@amt.cz